Παρατήρηση: Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $B \subseteq A$ τότε ο περιορισμός της f στο B (δηλαδή η συνάρτηση $g = f|_B$) είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παραδείγματα:

(α) $f(x) = \sin(x^2)$ (β) $g(x) = \cos(x^2)$

Αν θέσουμε $x_n = \sqrt{2n\pi}$ και $y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$:

$$x_n - y_n = \sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{2n\pi - (2n\pi + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi + \frac{\pi}{2n}}\right)} \to 0$$

Ενώ: $f(x_n) - f(y_n) = \sin(x_n^2) - \sin(y_n^2)$
$$= \sin(2n\pi) - \sin(2n\pi + \pi/2) = 0 - 1 \to -1 \neq 0$$

(β) Το ίδιο και για τη $g(x) = \cos(x^2)$

$g(x_n) - g(y_n) = \cos(2n\pi) - \cos(2n\pi + \pi/2) = 1 - 0 = 1 \to 1 \neq 0$

Άρα οι f, g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

Θεώρημα (Θεμελιώδες θεώρημα συνεχών συναρτήσεων)
Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τότε $(\exists\, \varepsilon > 0)$ ώστε: $(\forall\, \delta > 0)$ υπάρχουν $x, y \in [a,b]$ με $|x - y| < \delta$ και $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. (*)

Εφαρμόζοντας την (*) για $\delta = \frac{1}{n}$ (για $n = 1, 2, 3, \ldots$) βρίσκουμε $x_n, y_n \in [a,b]$ με $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Εφόσον η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή υπάρχει υπακολουθία

$(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $x_{k_n}\to\xi$

Εφόσον $a\leq x_{k_n}\leq b$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $x_{k_n}\to\xi$

Προκύπτει ότι $a\leq\xi\leq b$

Εφόσον $y_{k_n}=\underbrace{x_{k_n}}_{\xi}-(\underbrace{x_{k_n}-y_{k_n}}_{0})\to\xi$

(Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι $x_n-y_n\to0$ οπότε $x_{k_n}-y_{k_n}\to0$ ως υπακολουθία)

Εφόσον η f είναι συνεχής στο ξ και ισχύουν $x_{k_n}\to\xi$, $y_{k_n}\to\xi$ προκύπτει ότι $f(x_{k_n})\to f(\xi)$ και $f(y_{k_n})\to f(\xi)$

και άρα $f(x_{k_n})-f(y_{k_n})\to0$

Άρα $|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})|\to0$ άτοπο εφόσον

$|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})|\geq\epsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Θεώρημα: Αν η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για κάθε βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy

Απόδειξη:

Έστω $\epsilon>0$. Εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής ($\exists\,\delta>0$) ώστε για κάθε $x,y\in A$ αν $|x-y|<\delta$, τότε $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ (1)

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, ($\exists\, n_0\in\mathbb{N}$) ώστε για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$, αν $n,m\geq n_0$, τότε $|x_n-x_m|<\delta$

Έτσι για $n,m\geq n_0$ από την (1) προκύπτει: $|f(x_n)-f(x_m)|<\epsilon$

Επομένως η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία.

Θεωρημα Εστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχης. Η f ειναι ομοιομορφα συνεχης ανν υπαρχουν τα δυο ορια $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ και να ειναι πραγματικοι αριθμοι.

Αποδειξη:

($\Leftarrow$) Υποθετουμε οτι τα ορια $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ υπαρχουν και ειναι πραγματικοι αριθμοι.

Επεκτεινουμε την f στο $[a,b]$ ως εξης: $g:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b) \\ \lim_{x\to a^+} f(x), & x=a \\ \lim_{x\to b^-} f(x), & x=b \end{cases}$$

Η g ειναι συνεχης στο κλειστο διαστημα $[a,b]$, αρα ειναι ομοιομορφα συνεχης.

Αρα και η f (ως περιορισμος της g) ειναι ομοιομορφα συνεχης.

($\Rightarrow$) Υποθετουμε οτι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ειναι ομοιομορφα συνεχης, και θα δειξουμε οτι υπαρχει το οριο $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Ισχυρισμος 1:

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι ακολουθια στο (a,b) με $x_n\to a$ τοτε η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι συγκλινουσα

Αποδειξη:

Εφοσον $x_n\to a$ η ακολουθια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι βασικη ακολουθια και εφοσον η f ειναι ομοιομορφα συνεχης η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι βασικη ακολουθια

Συνεπως, η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι συγκλινουσα.

Ισχυρισμος 2

Το οριο της $(f(x_n))$ στον Ισχυρισμο 1, ειναι ανεξαρτητο της επιλογης της (x_n).

Δηλαδη αν (x_n), (y_n) ακολουθιες στο (a,b) με $x_n\to a$ και $y_n\to a$, $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εχουν το ιδιο οριο.

Απόδειξη $f(x_n) \to \ell$ και $f(y_n) \to \ell'$ έπεται $x_n \to a$, $y_n \to a$
Προφανώς $x_n - y_n \to 0$ και αφού f ομοιόμορφα συνεχής
$f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Άρα $\ell = \ell'$
Άρα από τα παραπάνω $\exists \ell \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε ακολουθία
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο (a,b) με $x_n \to a$ ισχύει $f(x_n) \to \ell$
Επομένως $\ell = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Ομοίως για το $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Παραδείγματα:

(α) $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \log x$
Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \log(x)$
Δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (αν ήταν θα ήταν και η παραπάνω f.)

(γ) $h:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \log(x)$
Είναι ομοιόμορφα συνεχής
[Πράγματι, $(1,+\infty)$ διάστημα
$h'(x) = \frac{1}{x}$
$|h'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in (1,+\infty)$
Άρα η h ομοιόμορφα συνεχής]

(δ) $f:(-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,0) \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(t) = 0$, $\forall t \in (-1,0)\cup(0,1)$
Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής,
(Θέτουμε $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, $x_n - y_n = \frac{2}{n} \to 0$ ενώ $f(x_n) - f(y_n) \to 1 \neq 0$
Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.)

(ε) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ενώ η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz

Απόδειξη:

Αν η f ικανοποιούσε συνθήκη Lipschitz, [redacted]
θα υπήρχε $M>0$, ώστε $\forall x,y\in[0,+\infty)$
να ισχύει $|\underbrace{f(x)}_{\sqrt{x}}-\underbrace{f(y)}_{\sqrt{y}}|\leq M|x-y|$

Από αυτό για $x=\frac{1}{n^2}$, $y=0$ για $n\in\mathbb{N}$
$|\frac{1}{n}-0|\leq M|\frac{1}{n^2}-0|$ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$ άτοπο

Άρα η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz

Δείχνουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Παρατηρούμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$.
[$|f'(x)|=|\frac{1}{2\sqrt{x}}|\leq\frac{1}{2}$, $\forall x\in[1,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο στο $[1,+\infty)$ άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$]

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$, εφόσον η f είναι ομ. συνεχής στο $[1,+\infty)$ $(\exists\delta_1>0)$ ώστε $\forall x,y\in[1,+\infty)$ αν $|x-y|<\delta_1$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$ (1)

Εφόσον η f είναι ομ. συνεχής στο $[0,1]$, $(\exists\delta_2>0)$ ώστε $\forall x,y\in[0,1]$: αν $|x-y|<\delta_2$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. (2)

Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$
Έστω $x,y\in[0,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$
(α) Αν $x,y\in[0,1]$ τότε εφόσον $|x-y|<\delta\leq\delta_1$ από τη (2)
$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$

(β) Αν $x, y \in [1, +\infty)$ τότε έχουμε $|x-y| < \delta \leq \delta_2$ από την (1)
$|f(x) - f(y)| < \epsilon/2 < \epsilon$

(γ) Αν $x \in [0, 1]$ και $y \in [1, +\infty)$ έχουμε $|x-y| < \delta$:
$|x-1| = 1-x < y-x < \delta \leq \delta_1$ άρα $|f(x) - f(1)| < \epsilon/2$
$|y-1| = y-1 < y-x < \delta \leq \delta_2$ άρα $|f(1) - f(x)| < \epsilon/2$.
Άρα $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

(5ε) Έστω $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη:
Η f είναι συνεχής στο $[0, a]$, άρα f ομ. συνεχής στο $[0, a]$.
Η f είναι ομ. συνεχής στο $[a, +\infty)$
Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι ακριβώς ίδιο με την προηγούμενη.

(ϛ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(3x+2)$.
$\mathbb{R}$ διάστημα, f παραγωγίσιμη
$f'(x) = -3\sin(3x+2)$
$|f'(x)| \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι ομ. συνεχής

(η) $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Η f είναι συνεχής $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0$

Άρα η f είναι ομ. συνεχής

(θ) $f\ (0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$ Η f είναι ομ. συνεχής.

(ι) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$

$\mathbb{R}$ διάστημα

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$ $|f'(x)| = \frac{2|x|}{(|x|^2+4)^2}$

• Αν $|x| \leq 1$: $|f'(x)| \leq \frac{2\cdot 1}{4^2} \leq \frac{1}{8}$

• Αν $|x| \geq 1$: $|f'(x)| \leq \frac{2|x|}{|x^2|^2} = \frac{2}{|x|^3} \leq 2$

Επομένως $|f'(x)| \leq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι ομ. συνεχής.

(ια) $f: (-\infty, -3) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$

διάστημα $(-\infty, -3)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$|f'(x)| \leq \frac{1}{9}$ $\forall x \in (-\infty, -3)$. Άρα f ομ. συνεχής

(ιβ) $f: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$.

$x_n = -\frac{1}{n}$

$y_n = -\frac{1}{n+1}$ $x_n - y_n \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) = (-n) - (-(n+1)) = 1 \to 1 \neq 0$

Άρα η f δεν είναι ομ. συνεχής.